4.1.1 Çözümlü Problemler

(1) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların, eğer varsa, karşılarında yazılı x_0 noktalarındaki türevlerini bulunuz. Fonksiyon bu noktalarda sürekli midir?

(a) $f(x) = x [\![x]\!] , x_0 = 0,\ x_0 = \frac{3}{2}$;

(b) $f(x) = \mid x \mid \sin x, x_0 = 0$;

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x}(1 - \cos x), x_0 = 0$;

(d) $f(x) = 3 \mid x + 1 \mid, x_0 = -2$;

(e) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x. \ln 2x, x_0 = 1$;

(f) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (x - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}, x_0 = 1$;

(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \mid \cos \frac{\pi}{x} \mid, & x \neq 0 \text{ise}, \\ 0 & , x = 0 \text{ ise}, \mathrm{x_0 = 0 \ vex_0} = \frac{2}{2\mathrm{k}+1}, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin x^2}{x} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise}, \\ 0 & , x = 0 \text{ ise}, \mathrm{x_0} = 0; \end{cases}$$

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ rasyonel ise}, \\ x^2 & , x \text{ irrasyonel ise}, \mathrm{x_0} = 0; \end{cases}$$

(j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ rasyonel ise} \\ -x^2 & , x \text{ irrasyonel ise}, \mathrm{x_0 = a} \neq 0; \end{cases}$$

Çözüm: (a) $x \in (1,2)$ olsun. Bu durumda, $[\![x]\!] = 1, f(x) = x$ olduğuna göre (4.2) den dolayı

$$f'(\frac{3}{2}) = \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{3}{2})}{x - \frac{3}{2}} = \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{x - \frac{3}{2}}{x - \frac{3}{2}} = 1$$

olur. $x_0 = 0$ ın solunda ve sağında f nin tanımı değiştiğinden burada sol ve sağ taraflı türevleri bulmalıyız. $\forall x \in (-1,0)$ için $[\![x]\!] = -1, f(x) = -x$ ve $\forall x \in (0,1)$ için $[\![x]\!] = 0, f(x) = 0$ olduğundan (4.4) ten dolayı

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{0}{x} = 0$$

olduğuna göre, fonksiyonun $x_0 = 0$ da türevi yoktur. $f(x), x_0 = \frac{3}{2}$ de sürekli (Önerme 4.1.3)e göre),$x_0 = 0$ da ise, süreksizdir. (çünkü $f(0^-) = -1, f(0^+) = 0$ ve $f(0^-) \neq f(0^+)$ dır.)

(b) (4.2) ye göre

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \mid x \mid \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \mid x \mid . \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$$

olur. Fonksiyon $x_0 = 0$ da süreklidir, çünkü bu noktada türevlenebilirdir.

(c) (4.2) ye göre

$$f'(0) \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^{\frac{2}{3}}}$$

[$x \longrightarrow 0$ iken $1 - cosx \sim \frac{1}{2}x^2$ olduğundan]

$$= \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} x^{\frac{4}{3}} = 0$$

olur. Önerme 4.1.3 den dolayı f, $x_0 = 0$ da süreklidir.

(d) (4.2) ye göre

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{x\to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \\ &= \lim_{x\to -2} \frac{3 \mid x+1 \mid -3}{x+2} \end{aligned}$$

[$x \to -2$ iken $| x+1 | = -(x+1)$ olduğundan]

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to -2} \frac{-3(x+1)-3}{x+2} \\ &= -3 \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x+2} = -3 \end{aligned}$$

olur. Önerme 4.1.3 den dolayı fonksiyon $x_0 = -2$ noktasında süreklidir.
(e) (4.2) ye göre

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\log_2 x \ln 2x - \log_2 1 . \ln 2}{x-1} \quad [\log_2 1 = 0] \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\log_2 x \ln 2x}{x-1} \end{aligned}$$

[$x - 1 = t$ dersek, $x \to 1 \Leftrightarrow t \to 0$ olduğundan]

$$\begin{aligned} &= \lim_{t\to 0} \frac{\log_2(1+t) \ln 2(1+t)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \log_2 (1+t)^{\frac{1}{t}} . \lim_{t\to 0} \ln 2(1+t) \\ &= \log_2 e . \ln 2 = 1 \end{aligned}$$

olur. Önerme 4.1.3 ten dolayı fonksiyon $x_0 = 1$ noktasında süreklidir.
(f) (4.2) ye göre

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1)} = \lim_{x\to 1} \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

olur. Önerme 4.1.3 ten dolayı fonksiyon $x_0 = 1$ noktasında süreklidir.
(g) (4.2) ye göre

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \mid \cos \frac{\pi}{x} \mid$$

[$\forall x \neq 0$ için $| \cos \frac{\pi}{x} | \leq 1$ olduğuna göre, $| x || \cos \frac{\pi}{x} | \leq | x |$ olduğundan] $f'(0) = 0$ olur. Önerme 4.1.3 ten dolayı fonksiyon $x_0 = 0$ noktasında süreklidir.

$\frac{2}{2k+1}, k \in \mathbb{Z}$ noktalarında $f$nin sol ve sağ taraflı türevlerini (4.4) den yararlanarak bulalım.

$$f'\Big(\big(\frac{2}{2k+1}\big)^+\Big) = \lim_{x \to \left(\frac{2}{2k+1}\right)^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{2}{2k+1}\right)}{x - \frac{2}{2k+1}} = \lim_{x \to \left(\frac{2}{2k+1}\right)^+} \frac{x^2 \mid \cos\frac{\pi}{x} \mid}{x - \frac{2}{2k+1}}$$

[$x - \frac{2}{2k+1} = t$ dersek, $x \to \left(\frac{2}{2k+1}\right)^+ \Leftrightarrow t \to 0^+$ olduğundan]

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\Big(\frac{2}{2k+1} + t\Big)^2 \mid \cos\frac{(2k+1)\pi}{2+(2k+1)t} \mid \quad [\lim_{t\to 0^+}\Big(\frac{2}{2k+1} + t\Big)^2 = \frac{4}{(2k+1)^2}] \\
&= \frac{4}{(2k+1)^2} \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \mid \cos\Big(\frac{(2k+1)\pi}{2} + \Big(\frac{(2k+1)\pi}{2+(2k+1)t} - \frac{(2k+1)\pi}{2}\Big)\Big) \mid \\
&= \frac{4}{(2k+1)^2} \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\Big| \sin\Big(\frac{(2k+1)\pi}{2+(2k+1)t} - \frac{(2k+1)\pi}{2}\Big)\Big|
\end{aligned}$$

[$u \to 0$ iken $\sin u \sim u$ olduğundan]

$$= \frac{4}{(2k+1)^2} \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \mid \frac{(2k+1)\pi}{2+(2k+1)t} - \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid = \pi$$

bulunur. Benzer şekilde, $f'\Big(\big(\frac{2}{2k+1}\big)^-\Big) = -\pi$ olduğu elde edilir. $f'\Big(\big(\frac{2}{2k+1}\big)^-\Big) \neq f'\Big(\big(\frac{2}{2k+1}\big)^+\Big)$ olduğuna göre, fonksiyon $x_0 = \frac{2}{2k+1}, k \in \mathbb{Z}$ noktalarında türevlenebilir değildir.

$\lim\limits_{x \to \frac{2}{2k+1}} f(x) = 0 = f(\frac{2}{2k+1})$ olduğuna göre, fonksiyon $x_0 = \frac{2}{2k+1}, k \in \mathbb{Z}$ noktalarında süreklidir.

(h) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x^2}{x} \sin\frac{1}{x}$

[$x \to 0$ iken $\arcsin x^2 \sim x^2$ olduğundan]

$$= \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

olduğuna göre, fonksiyon $x_0 = 0$ da süreklidir. Bu fonksiyonun $x_0 = 0$ da sağ ve sol taraflı türevlerinin varolmadığını görelim. Bunu sağ taraflı türev halinde yapalım. (4.4) e göre

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arcsin x^2}{x^2} \sin\frac{1}{x}$$

limiti yoktur çünkü, $g(x) = \frac{\arcsin x^2}{x^2} \sin \frac{1}{x}, x \neq 0$ olmak üzere $x_n = \frac{1}{2n\pi}, n \in \mathbb{N}$ dizisi için $n \to \infty$ iken $x_n \to 0^+$, fakat $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arcsin {x^2}_n}{{x_n}^2} \sin \frac{1}{x_n} = 0$ ve $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}, n \in \mathbb{N}$ dizisi için $n \to \infty$ iken $y_n \to 0^+$, fakat $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arcsin {y^2}_n}{{y_n}^2} \sin \frac{1}{y_n}$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arcsin {y^2}_n}{{y_n}^2} = 1$ dir.

(i) $f(0) = 0$ olduğu açıktır. $h \in \mathbb{Q}, h \to 0$ iken

$$f(0+h) - f(0) = f(h) = 0 \Rightarrow \lim_{\mathbb{Q}\ni h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{\mathbb{Q}\ni h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$h \in I, h \to 0$ iken

$$f(0+h) - f(0) = f(h) = h^2 \Rightarrow \lim_{I\ni h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{I\ni h\to 0} h = 0$$

olduğuna göre, $f, x_0 = 0$ da türevlenebilirdir ve $f'(0) = 0$ dır. Önerme 4.1.3 den dolayı fonksiyon $x_0 = 0$ da süreklidir.

(j) $0 \neq a \in \mathbb{Q}$ olsun. Bu durumda, $f(a) = a^2$ ve

$$\lim_{\mathbb{Q}\ni x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\mathbb{Q}\ni x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$$

$$\lim_{I\ni x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{I\ni x\to a} \frac{-x^2 - a^2}{x - a} = \infty$$

olduğuna göre, fonksiyon $x_0 = a \neq 0$ da türevli değildir.
$a \in I$ durumunda f nin $x_0 = a$ da türevli olmadığı benzer şekilde gösterilir. Fonksiyon $x_0 = a \neq 0$ noktasında süreksizdir, çünkü $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limiti yoktur. ⋄

(2) $X \subset \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun süreksiz olduğu bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. f, x_0 da (a) sonlu ,(b) sonsuz türeve sahip olabilir mi?

Çözüm: (a) Önerme 4.1.3 e göre fonksiyon türevlenebilir olduğu noktada süreklidir. Dolayısıyla, fonksiyon x_0 da sonlu türeve sahip olamaz.

(b) Evet. Örneğin, $x_0 = 0$ noktası $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sgn} x$ fonksiyonunun süreksizlik noktasıdır ve (4.4) e göre

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty,$$

olduğuna göre, $f'(0) = +\infty$ olur. $\diamond$

(3) $x_0 \in (a,b)$ noktası $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun 1. çeşit süreksizlik noktası olsun.

$$f'_-(x_0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0^-)}{h}$$

ve

$$f'_+(x_0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0^+)}{h}$$

limitlerine $f$nin $x = x_0$ noktasında genelleştirilmiş anlamda sırasıyla sol ve sağ taraflı türevi denir.
$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1+x}}{x}$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasında genelleştirilmiş anlamda sol ve sağ taraflı türevlerini bulunuz.
Çözüm: Önce $f(0^-), f(0^+)$ ları bulalım.

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\sqrt{1+x}}{x} = -1$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{1+x}}{x} = 1$$

olduğuna göre, $x_0 = 0$ noktası f nin 1. çeşit süreksizlik noktasıdır. Yukarıdaki tanıma göre,

$$\begin{aligned} f'_-(0^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0^-)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|\,h\,|\sqrt{1+h} + h}{h^2} \\ &= -\lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_+(0^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0^+)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\mid h \mid \sqrt{1+h}-h}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Demek ki, $f'_-(0^-) = -\frac{1}{2}$ ve $f'_+(0^+) = \frac{1}{2}$ dir. $\diamond$

4.1.2 Ek Problemler

(4) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların, eğer varsa, karşılarında yazılı x_0 noktalarındaki türevlerini bulunuz. Fonksiyon bu noktalarda sürekli midir?

(a) $f(x) = \mid 1-x^2 \mid, \quad x_0 = 1$;

(b) $f(x) = x - [\![x]\!]$, $x_0 = 1$ ve $\mathrm{x}_0 = \frac{1}{2}$;

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 0$;

(d) $f(x) = \operatorname{sgn}(x-x^3)$, $x_0 = 0, x_0 = -1$, ve $\mathrm{x}_0 = 1$;

(e) $f(x) = \mid \ln x \mid$, $x_0 = 1$;

(f) $f(x) = \arccos(\sin x)$, $x_0 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \text{ ise}, \\ -x^2, & x \in I \text{ ise}, \ \mathrm{x}_0 = 0 \ ; \end{cases}$$

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise}, \\ 0, & x = 0 \text{ ise}, \ \mathrm{x}_0 = 0 \ ; \end{cases}$$

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \text{ ise}, \\ 0, & x = 0 \text{ ise}, \mathrm{x}_0 = 0 \ ; \end{cases}$$

(j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{Q} \text{ ise}, \\ x, & x \in I \text{ ise}, \mathrm{x}_0 = 0 \ ; \end{cases}$$

(k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise}, \\ 0, & x = 0 \text{ ise}, \mathrm{x}_0 = 0 \ . \end{cases}$$

(5) $f(x) = \operatorname{sgn}(x - x^3)$ fonksiyonunun $x_0 = 0, x_0 = -1$ ve $x_0 = 1$ noktalarında genelleştirilmiş anlamda sol ve sağ taraflı türevlerini bulunuz.
Cevap: $f_{\pm}{}'(0^{\pm}) = 0, f_{\pm}{}'(-1^{\pm}) = 0, f_{\pm}{}'(1^{\pm}) = 0$.

4.2 Türev Alma Kuralları

Teorem 4.2.1 : *Eğer, $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir $x \in [a, b]$ noktasında türevleri varsa, $\lambda u + \mu v, (\lambda, \mu \in \mathbb{R}), u.v$ ve $v(x) \neq 0$ ise, $\frac{u}{v}$ fonksiyonları da x noktasında türevlenebilirdir ve*

(a) $(\lambda u + \mu v)'(x) = \lambda u'(x) + \mu v'(x)$;

(b) $(u.v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

(c) $(\frac{u}{v})'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

eşitlikleri doğrudur.

İspat: Diğerlerini okuyucuya bırakarak (c) ifadesinin doğruluğunu gösterelim. v fonksiyonu $x \in [a, b]$ noktasında türevli olduğundan bu noktada süreklidir. O halde, $v(x) \neq 0$ olduğuna göre, $\exists \delta > 0$ öyleki $\forall t \in [a, b] \bigcap U_\delta(x)$ için $v(t) \neq 0$ olur (Bkz. Teorem 3.2.1(b)). Bu durumda, $x + h \in [a, b] \bigcap U_\delta(x)$ olacak şekilde $\forall h \neq 0$ için

$$\frac{1}{h}[\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}] = \frac{1}{v(x)v(x+h)}[v(x)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h}]$$